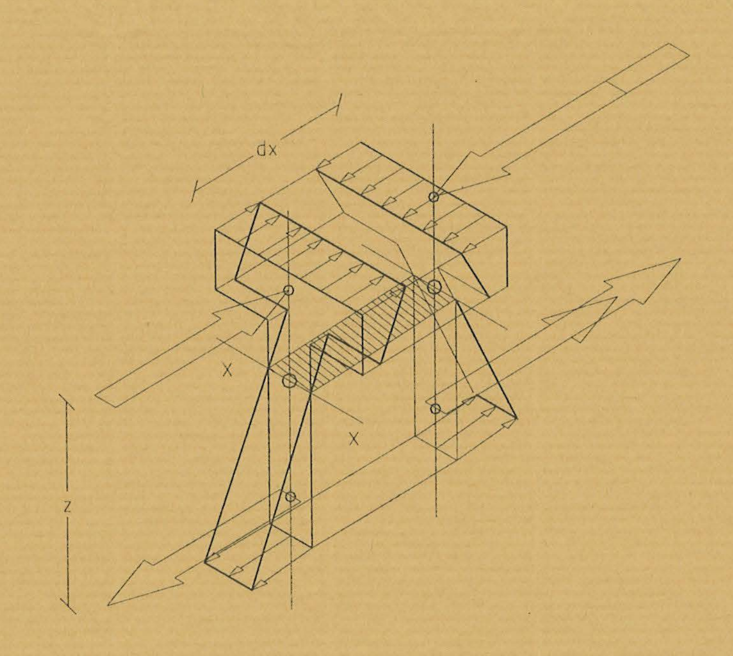
VIGAS (I)

RESISTENCIA

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA ESCUELA DE
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-03

VIGAS (I)

RESISTENCIA

por

Ricardo Aroca Hernández-Ros

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE
ARQUITECTURA
DE MADRID*

1-16-03

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

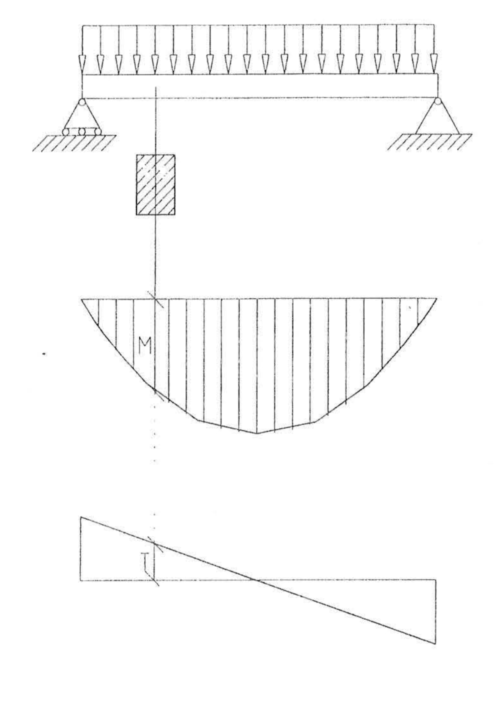
0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

1 Área
16 Autor
03 Ordinal de cuaderno (del autor)

VIGAS (I) Resistencia

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 35.06 / 1-16-03
ISBN: 84-95365-88-X (obra completa)
ISBN: 84-9728-120-9 (Vigas I)/(5ª edición)
Depósito Legal: M-44369-2004



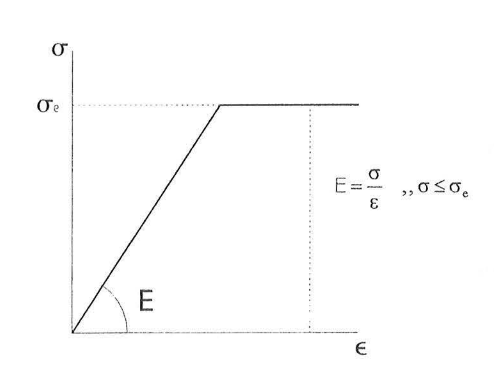
FLEXIÓN SIMPLE

En estructuras de edificación se utilizan con gran frecuencia vigas rectas —que además suelen ser de sección constante— y están sometidas a acciones perpendiculares a su directriz.

Aunque las estructuras trianguladas formadas por barras comprimidas y extendidas que pueden ser dimensionadas estrictamente, por lo que consumen menos material, la facilidad de fabricación de las vigas de alma llena —sección conexa— compensa en términos económicos.

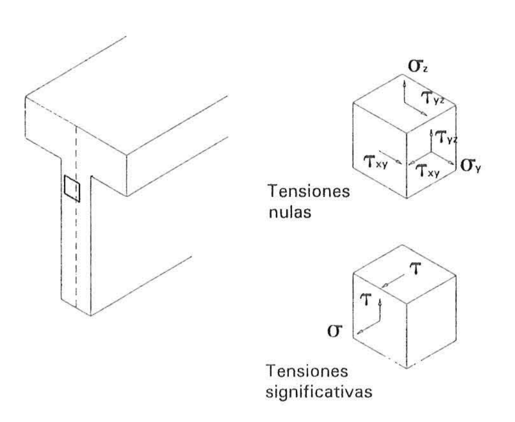
Se trata pues de resolver el problema de asegurar la resistencia de una viga cuyas gráficas de momentos y cortantes son conocidas.

El cálculo de la distribución de tensiones en cada sección es siempre un problema tridimensional de complicada solución exacta. En la práctica se hacen de entrada las siguientes hipótesis simplificadoras:



1. El material se encuentra en período elástico y presenta exacta proporcionalidad entre tensiones y deformaciones.

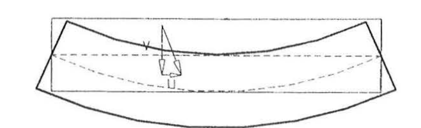
2. Tanto las tensiones en el plano perpendicular al habitual de dibujo como las correspondientes a la aplicación directa de las cargas son irrelevantes:
$\sigma_z \approx \sigma_y \approx \tau_{xy} \approx \tau_{yz} \approx 0$, de forma que sólo quedan como tensiones significativas σ_x, τ_{xz}, τ_{zx}

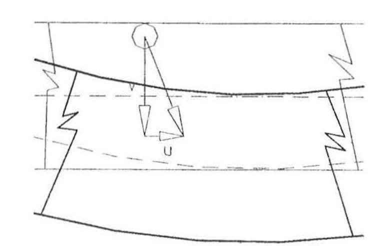


Se puede así tratar la cuestión como un caso de estado plano de tensión en el que además se asume que $\sigma_z \approx 0$

La solución del problema requiere emplear un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que debe ser resuelto en términos de los movimientos $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$

3. Para facilitar aún más la solución, desde el siglo XIX se introduce una nueva simplificación: la **hipótesis de Navier**, que aunque conduce a incoherencias en el cuadro final de deformaciones, proporciona resultados suficientemente aproximados para la práctica habitual y **permite establecer una relación directa entre solicitaciones y tensiones**. Así se pueden hallar con un aparato matemático muy moderado las **tensiones máximas** $\sigma_{máx}$ y $\tau_{máx}$ y comprobar que en el **modelo elástico** no son mayores que el valor de comprobación del material, f, estableciendo **como criterio de validez de una solución dada:** $\sigma_{máx} \leq f$

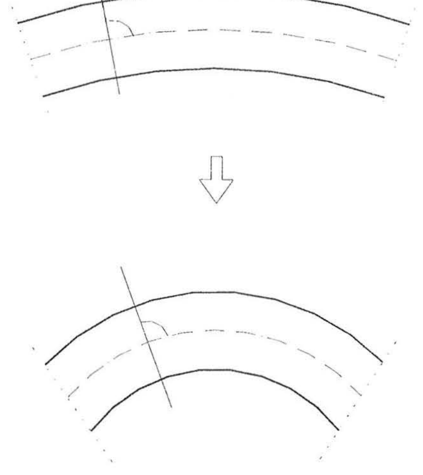




HIPÓTESIS DE NAVIER

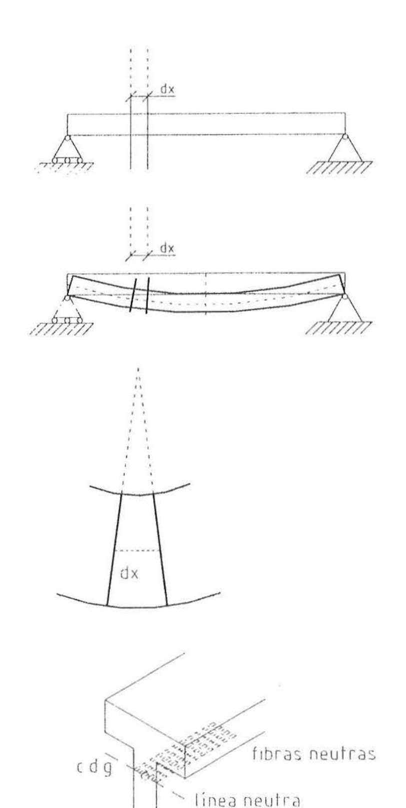
Llamando **directriz** de una pieza a la línea que une los centros de gravedad de sus secciones:

La deformación de una barra ocurre de modo que los puntos que se encuentran en un plano perpendicular a la directriz antes de la deformación, estarán en un plano perpendicular a la directriz de la barra deformada.



- La hipótesis sólo es válida para barras con una esbeltez mayor de 5 y no se verifica en las zonas distantes menos de un canto de barra de los apoyos.

CURVATURA LOCAL

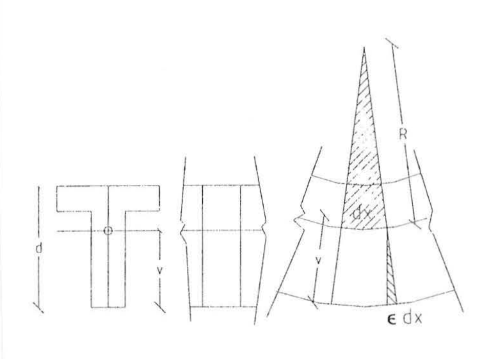


La consecuencia inmediata de la hipótesis de Navier es un modelo de deformación en el que una rebanada de pieza experimenta una curvatura.

En lo que sigue para mayor facilidad de comprensión se supone una barra de directriz recta, —es decir, una viga recta—.

Se demuestra más adelante que el plano que pasa por los centros de gravedad de las secciones no experimenta ninguna dilatación. Se llaman **fibras neutras** al material contenido en este plano y **línea neutra** a su intersección con el plano de la sección.

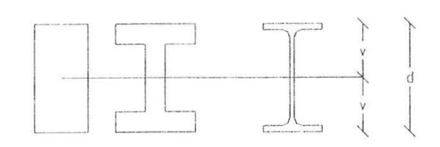
El modelo de deformación implica que la fibra más alejada de la línea neutra es la que más se deformará, y llamando v a la distancia desde la línea neutra al punto de la sección más alejado de ésta en la dirección de las cargas, se puede establecer una sencilla relación geométrica que permite determinar el **radio de curvatura R** y su inversa, la **curvatura local, 1/R.**



Utilizando la semejanza entre los triángulos rayados:

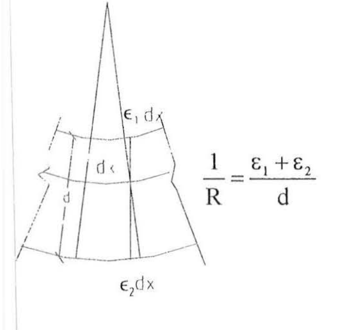
$$\frac{dx}{R} = \frac{\varepsilon \cdot dx}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_{máx}}{v}}$$

Si la sección de la viga es simétrica:

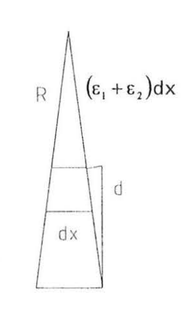


$$v = \frac{d}{2} \text{ y la fórmula queda: } \boxed{\frac{1}{R} = \frac{2 \cdot \varepsilon_{máx}}{d}}$$

También se puede expresar la relación de una tercera forma que puede ser útil en casos en que la viga se componga de materiales distintos, como el hormigón armado:



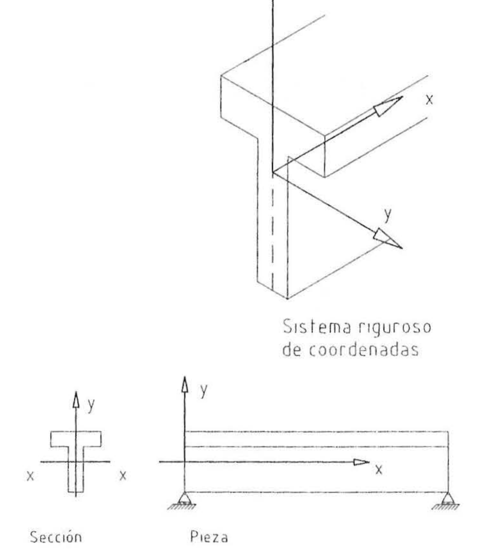
$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{d}$$

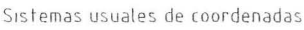


$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{d}}$$

DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES NORMALES (σ)

—En lo que sigue, para respetar la nomenclatura usual en los textos, se permite una licencia respecto al sistema de coordenadas:



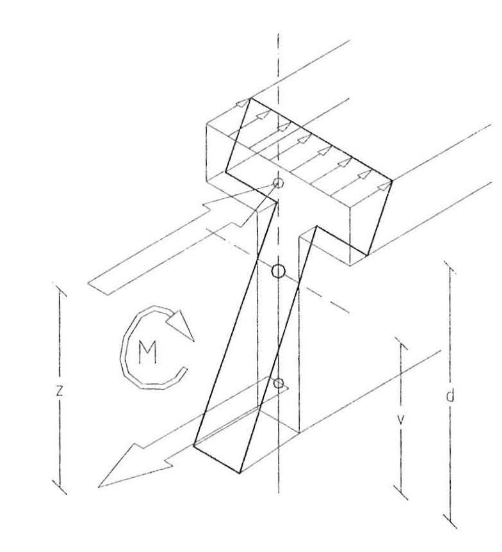


aunque lo correcto sería usar las coordenadas x y z, siendo z la vertical; como raramente se tratan a la vez las propiedades de la sección y las de la pieza, se suele llamar *"y"* a la coordenada vertical y siempre *"x"* a la horizontal, de manera que el eje xx será unas veces la directriz de la pieza y otras el eje horizontal de la sección—

Una vez establecido el modelo de deformaciones, es evidente que a ella corresponde una distribución lineal de tensiones.

Una primera aproximación al problema es la siguiente:

si se hallan las resultantes de las compresiones F^- y la de las tracciones F^+, ambas deben ser iguales en valor absoluto:



$$|F^-| = |F^+|$$

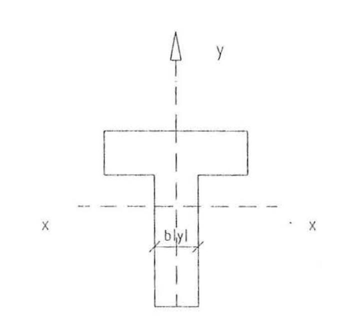
para que haya equilibrio de fuerzas horizontales.

Además, para que haya equilibrio de momentos:

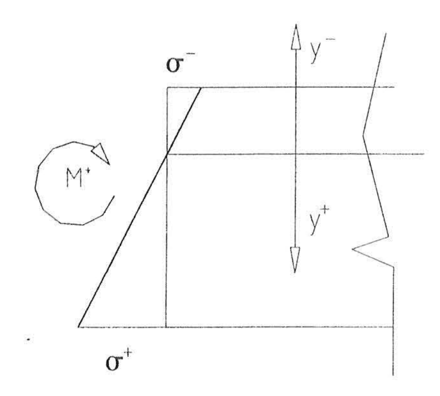
$$\mathbf{F \times z = M}$$

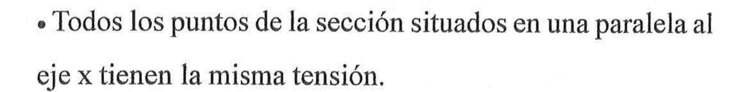
Se llama **brazo de palanca "z" a la distancia entre los puntos de aplicación de las resultantes de tensiones de tracción y compresión.**

Para hallar la tensión máxima "$\sigma_{máx}$" se utiliza el siguiente razonamiento:



Suponiendo que el ancho de la pieza viene expresado por una función b(y); de la ley plana de distribución de tensiones resulta que:





- Todos los puntos de la sección situados en una paralela al eje x tienen la misma tensión.

- Se puede expresar la tensión en cualquier punto en función de la tensión máxima.

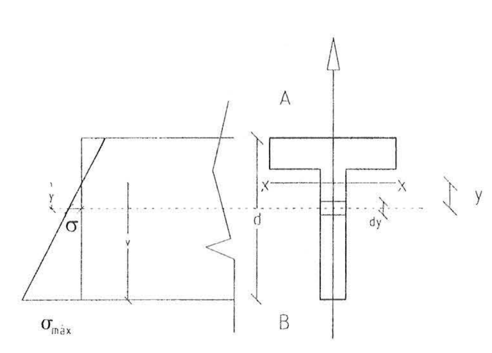
—Se consideran las y positivas hacia abajo y conviene no olvidar que las σ de compresión son negativas según convenio y las de tracción positivas—

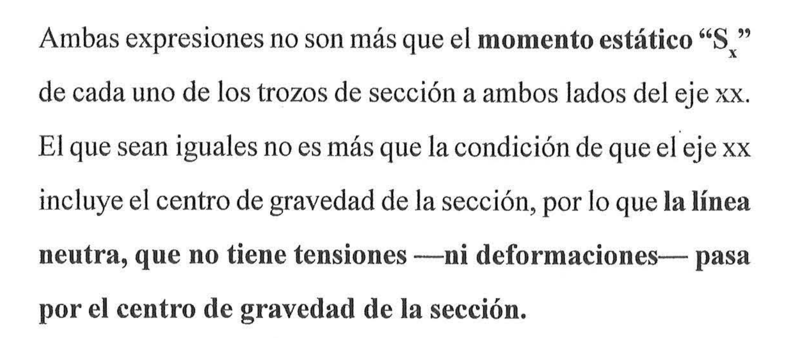
Para un momento flector positivo M:

$$\sigma = \frac{y}{v} \cdot \sigma_{máx} \quad \Rightarrow \quad F = \int_0^B \frac{y}{v} \cdot \sigma_{máx} \cdot b \cdot dx$$

el equilibrio de fuerzas horizontales adquiere la expresión:

$$\underbrace{\int_0^A \frac{y}{v} \cdot \sigma_{máx} \cdot b \cdot dy}_{\text{negativo}} + \underbrace{\int_0^B \frac{y}{v} \cdot \sigma_{máx} \cdot b \cdot dy}_{\text{positivo}} = 0$$

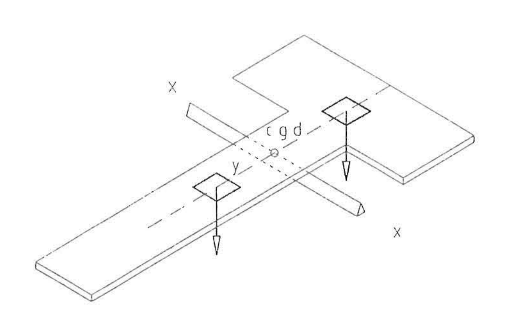


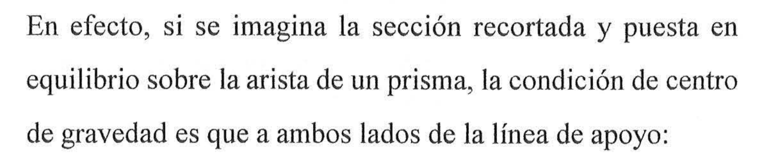


es decir, eliminando $\sigma_{máx}$ y v, que son constantes:

$$\left|\int_0^A y \cdot b \cdot dy\right| = \left|\int_0^B y \cdot b \cdot dy\right|$$

Ambas expresiones no son más que el **momento estático "S_x"** de cada uno de los trozos de sección a ambos lados del eje xx. El que sean iguales no es más que la condición de que el eje xx incluye el centro de gravedad de la sección, por lo que **la línea neutra, que no tiene tensiones —ni deformaciones— pasa por el centro de gravedad de la sección.**



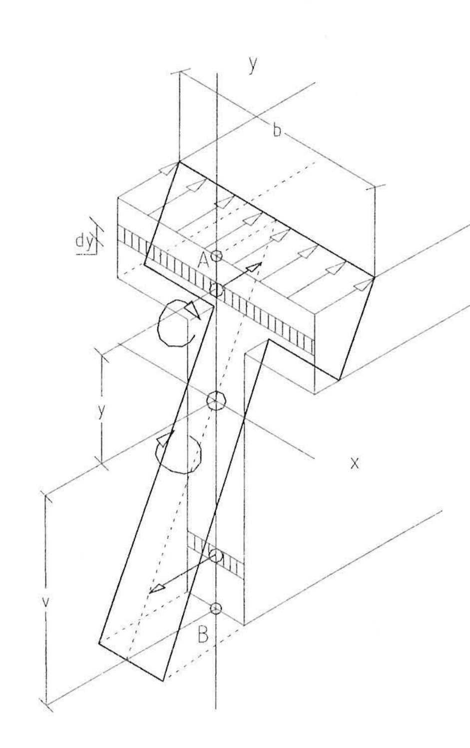


En efecto, si se imagina la sección recortada y puesta en equilibrio sobre la arista de un prisma, la condición de centro de gravedad es que a ambos lados de la línea de apoyo:

$$\iint y \cdot dx \cdot dy = S_0 \text{ sea igual.}$$

La resultante de tracciones o compresiones es $|F| = \frac{\sigma_{máx}}{v} \cdot S_0$

Se puede establecer la condición de equilibrio de momentos integrando el que producen la tensión "σ" de cada banda horizontal de la sección de área "$b \cdot dy$", multiplicando cada uno de ellos por su distancia "y" a la línea neutra; basta observar el sentido de los diferenciales de momento "$y \cdot \sigma \cdot b \cdot dy$" para ver que todos van en el mismo sentido y que todos son positivos, recordando además que



$$\sigma = \frac{\sigma_{máx} \cdot y}{v}$$

$$M = \int_A^B y \cdot \sigma \cdot b \cdot dy = \int_A^B y \cdot \sigma_{máx} \cdot \frac{y}{v} \cdot b \cdot dy = \sigma_{máx} \cdot \frac{1}{v} \int_A^B y^2 \cdot b \cdot dy$$

La integral no es otra cosa que el **momento de inercia I_x** de la sección respecto el eje x:

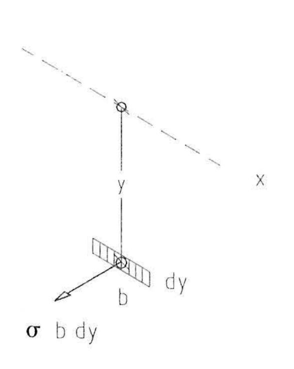
$$I_x = \int_A^B y^2 \cdot b \cdot dy$$

Se llama $W_x = \frac{I_x}{v}$ **módulo resistente** de la sección.

El módulo resistente permite establecer una relación directa entre solicitación y tensión máxima:

$$\boxed{\mathbf{M = W_x \cdot \sigma_{máx}}}$$

La fórmula puede utilizarse en dos variantes:



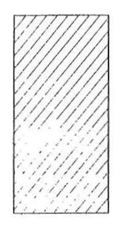
PERITAJE:

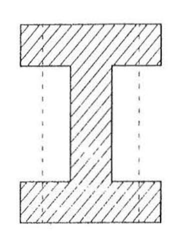
$$\boxed{\sigma_{máx} = \frac{M}{W_x} \leq f}$$ permite comprobar que para una sección dada la tensión máxima no supera la admisible.



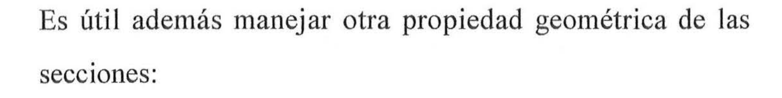
PROYECTO:

$$\boxed{W_x \geq \frac{M}{f}}$$ permite determinar, dado un material, el valor del módulo resistente necesario y disponer en consecuencia una sección suficiente.





A igualdad de área la sección de la derecha tendrá mayor radio de giro y por tanto mayor inercia y módulo resistente que la de la izquierda



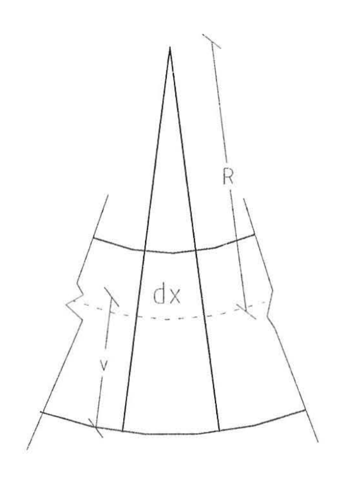
Es útil además manejar otra propiedad geométrica de las secciones:

Está claro que a mayor área, mayor inercia y mayor módulo resistente; pero si se quiere discernir la eficacia de una **forma** como sección de una viga, conviene definir **el radio de giro i_x**:

$$i^2_x = \frac{I_x}{A} \quad \Rightarrow \quad i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

que mide la distancia cuadrática media del área respecto al eje xx ; como se verá más adelante, **es el parámetro relevante para determinar la eficacia de la forma de una sección.**

La expresión de la distribución de tensiones permite a su vez establecer una formulación alternativa para la curvatura local de una viga:



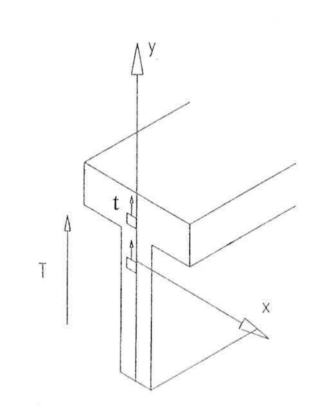
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \varepsilon_{máx} = \dfrac{\sigma_{máx}}{E} \\ \sigma_{máx} = \dfrac{M}{W_x} \\ W_x = \dfrac{I_x}{v} \end{array}\right\} \sigma_{máx} = \dfrac{M \cdot v}{I_x} \end{array}\right\} \varepsilon_{máx} = \dfrac{M \cdot v}{E \cdot I_x} \\ \dfrac{1}{R} = \dfrac{\varepsilon_{máx}}{v} \end{array}\right\} \frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot I_x}$$

Se pueden pues emplear alternativamente las siguientes expresiones para la curvatura local:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_{máx}}{v} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{d} = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{2 \cdot \varepsilon_{máx}}{d}}$$

—La última expresión sólo es válida para secciones simétricas respecto al eje xx—.

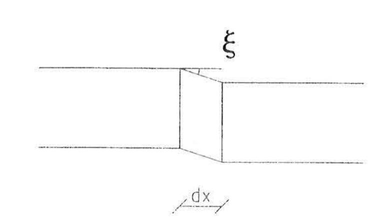
DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES (τ)



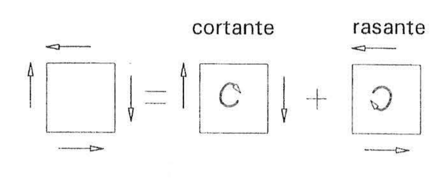
El equilibrio de fuerzas verticales determina que la solicitación de **esfuerzo cortante** sólo puede traducirse en **tensiones tangenciales t** y es evidente la expresión:

$$V = \iint \tau \cdot dx \cdot dy$$

Para averiguar la distribución de tensiones tangenciales en la sección lo más sencillo sería hacer una hipótesis semejante a la de Navier que no podría ser otra que la de distorsión "φ"constante, lo que conduciría a una "τ" constante en toda la sección.

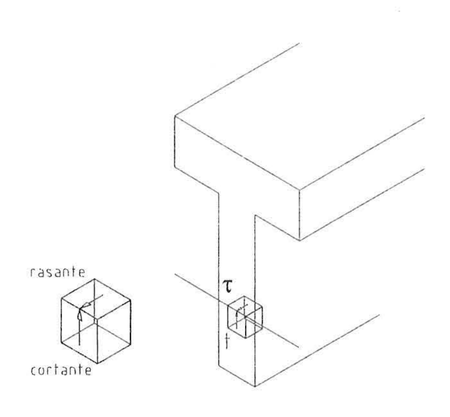


Desgraciadamente la distribución de "τ" resultante no es congruente con la distribución de "σ" ya obtenida y se opta por hallar una distribución de "τ" congruente con la de "σ" aunque ello implique una inconsistencia geométrica que sólo es grave en las proximidades de los apoyos o en el caso de vigas poco esbeltas.

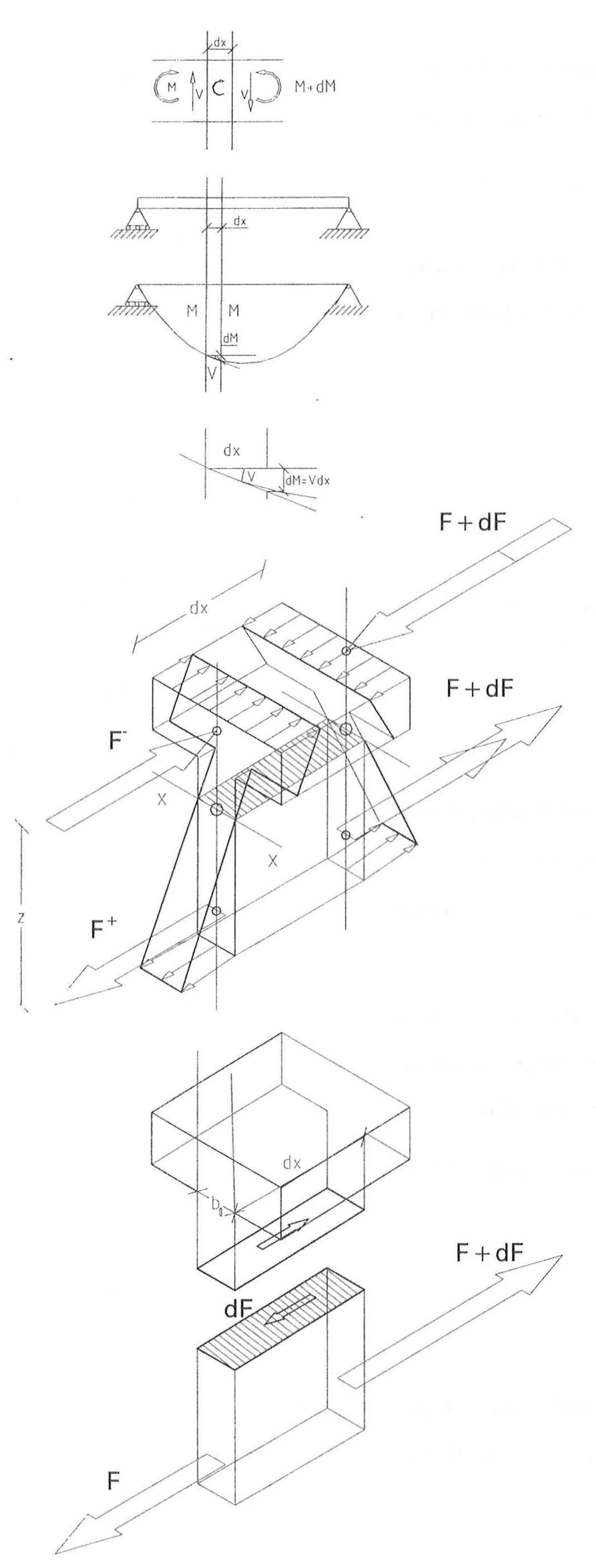


Para establecer la distribución de "τ" basta recordar que la tensión de cortadura debe en cada punto ser igual a la tensión rasante indisolublemente ligada a aquélla —si sólo hubiera tensión de cortadura el elemento giraría—.

Se saca partido de este hecho formulando equilibrios parciales de una rebanada de pieza; lo que sirve para calcular la magnitud del rasante en distintos puntos de la sección —de antemano sabemos que en los bordes superior e inferior el rasante debe ser τ =0, ya que no hay ningún vínculo exterior que pueda equilibrar un rasante significativo—.



Se empieza calculando el rasante τ_0 a la altura de la línea neutra, donde salvo excepciones que se discutirán más adelante, el rasante y por ende el cortante alcanzarán su valor máximo.



Si se dan dos cortes paralelos en una zona de viga donde haya esfuerzo cortante se puede expresar el momento en el corte a la derecha en función del valor M del corte a la izquierda:

$$M + dM = M + V \cdot dx$$

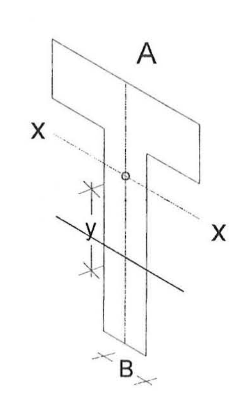
$$dM = V \cdot dx$$

Si se plantea el equilibrio de la parte de la rebanada por debajo de la línea neutra llamando "b_0" al ancho de la sección a esta altura, la única manera de que haya equilibrio de fuerzas horizontales en el trozo inferior de la rebanada es que exista en el corte una fuerza de magnitud "dF" que será la resultante de las tensiones rasantes:

$$\tau_0 \cdot b_0 \cdot dx = dF = \frac{dM}{z} = \frac{V \cdot dx}{z}$$

$$\boxed{\tau_0 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{z} \cdot \mathbf{b_0}}}$$ es el valor máximo de la tensión tangencial

Para cualquier corte distinto de la línea neutra el volumen de tensiones F_1 en el trozo de rebanada siempre es menor que F:

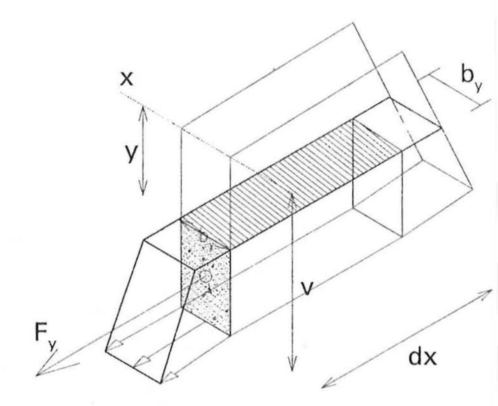


$$F_y = \int_y^v \sigma_{máx} \cdot \frac{y}{v} \cdot b \cdot dy = \frac{\sigma_{máx}}{v} \cdot \int_y^v y \cdot b \cdot dy = \frac{\sigma_{máx}}{v} \cdot S_y$$

Siendo S_y el momento estático del trozo de sección por encima de una línea horizontal situado a una distancia y del eje x respecto al eje x

$$F_y = \frac{\sigma_{máx}}{v} \cdot S_y = \frac{\sigma_{máx}}{v} \cdot S_0 \cdot \frac{S_y}{S_0} = F \cdot \frac{S_y}{S_0}$$

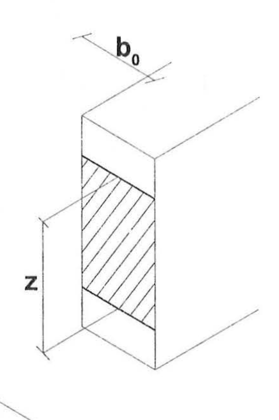
y en consecuencia como:



$$\tau_y = \frac{dF_y}{b_y \cdot dx} = \frac{S_y}{S_0} \cdot \frac{b_0}{b_y} \cdot \frac{dF}{b_0 \cdot dx} = \frac{S_y}{S_0} \cdot \frac{b_0}{b_y} \cdot \frac{dM/dx}{b_0 \cdot z} = \frac{S_y}{S_0} \cdot \frac{b_0}{b_y} \cdot \frac{V}{b_0 \cdot z}$$

$$\boxed{\tau_y = \tau_0 \cdot \frac{S_y}{S_0} \cdot \frac{b_0}{b_y}}$$

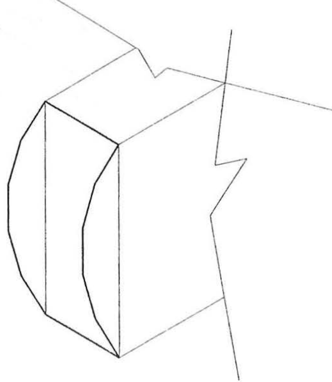
Al ser "S_y" el momento estático del área punteada respecto a la línea neutra tiene un valor máximo para $y = 0$ —la línea neutra— y un valor 0 en los bordes superior e inferior de la sección.



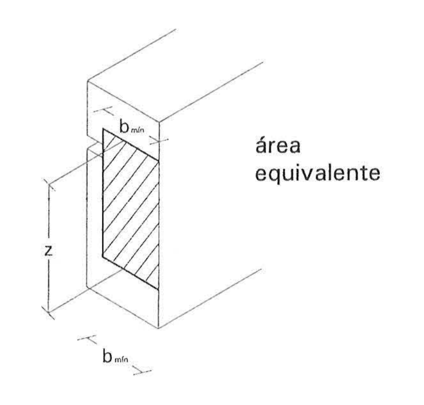
La manera más sencilla de hacerse una idea del valor máximo de las "τ"es suponer que las tensiones tangenciales se distribuyen uniformemente en un área de magnitud $b_0 \times Z$

Para una sección rectangular la distribución de "τ" es parabólica.

$$\tau_0 = \tau_{máx} = \frac{V}{b \cdot Z} = \frac{V}{b \cdot \frac{2}{3} \cdot d} = 1{,}5 \cdot \frac{V}{b \cdot d}$$

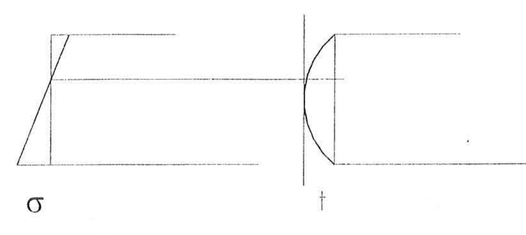


Conviene advertir que si la forma de la sección tiene algún estrangulamiento, aumentarán considerablemente las tensiones máximas de cortadura.

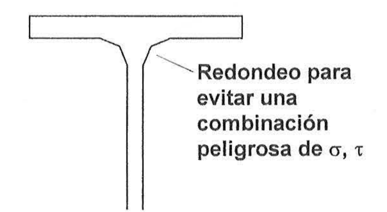


Como regla simple del lado de la seguridad: el área equivalente en la que puede suponerse que se distribuyen uniformemente las tensiones tangenciales a efectos de calcular el $\tau_{máx}$ es un rectángulo de altura Z y de ancho el mínimo entre las resultantes de compresión y tracción:

$$\tau_{máx} = \frac{V}{b_{mín} \cdot Z}$$

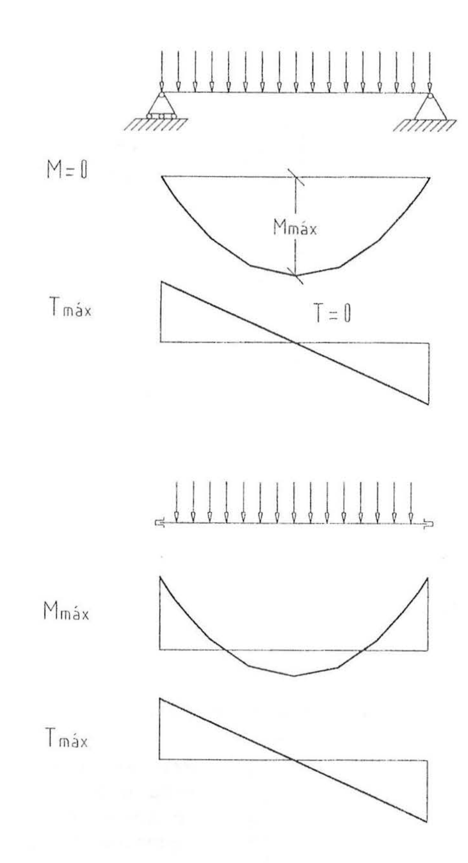


Afortunadamente las distribuciones de tensiones normales y tangenciales tienen los máximos cambiados y lo mismo sucede con los puntos de momento y cortante máximos a lo largo de las vigas apoyadas por lo que no es generalmente necesario buscar las direcciones principales de tensión.



En los apoyos intermedios de las vigas continuas se producen a la vez cortantes y momentos máximos; y debido a la forma de distribución de tensiones tangenciales en los perfiles laminados, en la unión del alma con las alas, la tensión normal es casi la máxima, mientras que la tangencial también lo sería si no se corrigiera el diseño, redondeando la unión para reducirla.

TENSIÓN ADMISIBLE A CORTANTE —TENSIÓN DE COMPARACIÓN—



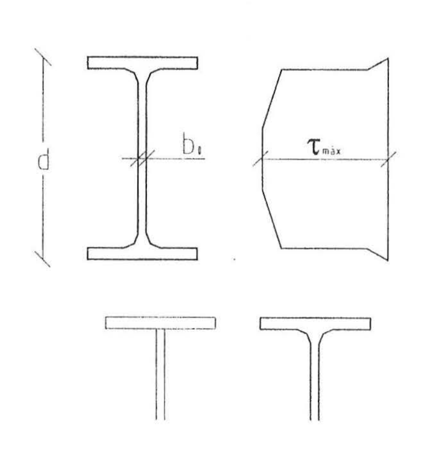
La complejidad del estado tangencial de tensiones que implica simultáneamente tracciones y compresiones hace que aún en materiales isótropos como el acero la resistencia a cortante sea $\sqrt{3}$ veces menor que a tracción o compresión, es decir, una tensión segura de 100 N · mm^{-2} para un acero A42.

En materiales que resisten poco a tracción en alguna dirección, la resistencia a cortante es nula o muy escasa. En el hormigón su valor se sitúa alrededor de 0,4 N · mm^{-2}.

La madera tiene una escasa resistencia a tracción en dirección perpendicular a las fibras, lo que reduce su resistencia a cortante a un valor del orden de 1 N · mm^{-2}.

Tensiones de comparación N·mm^{-2}

	compresión	tracción	cortante
Acero A-42	170	170	100
Hormigón H25	10,4	-	0,4
Madera	8-10	8-10	1,0



FÓRMULAS

Geométricas



Área: $A = \iint dx \cdot dy$

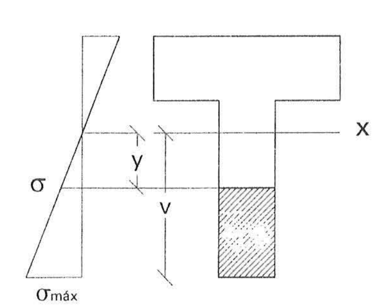
Momento estático: $S_x = \iint y \cdot dx \cdot dy$

Momento de inercia: $I_x = \iint y^2 \cdot dx \cdot dy$

Módulo resistente: $W_x = \frac{I_x}{v}$

Radio de giro: $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

Distribución de tensiones:



$$\sigma_{máx} = \frac{M}{W_x}$$

$$\sigma = \sigma_{máx} \cdot \frac{y}{v}$$

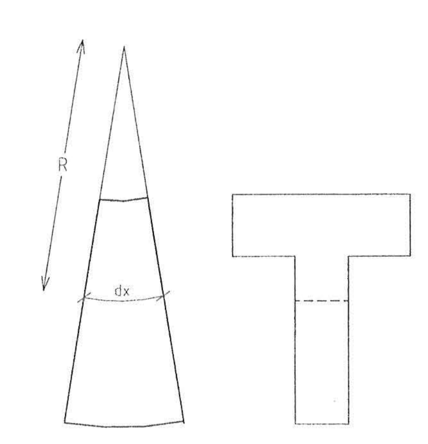
$$\tau_{máx} = \frac{V}{b_0 \cdot Z}$$

$$\tau = \tau_{máx} \cdot \frac{S_y}{S_0} \cdot \frac{b_0}{b_y}$$

$S_0 \Rightarrow$ momento estático de la parte comprimida o la extendida de la sección.

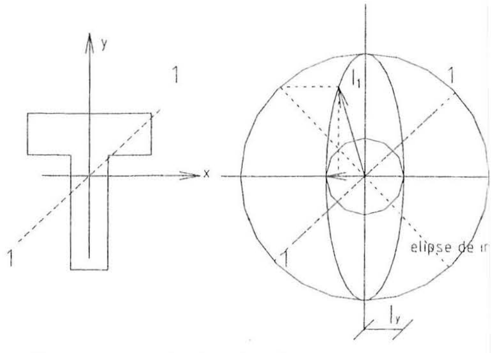
$S_y \Rightarrow$ momento estático respecto al eje X de la parte rayada.

Curvatura local:



$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_{máx}}{V} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{d} = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{2 \cdot \varepsilon}{d}$$

Consideraciones geométricas sobre Inercia, Radio de giro y Módulo resistente.



Representamos las inercias de una sección respecto a ejes que pasen por su centro de gravedad, por vectores perpendiculares a cada eje, los extremos de los vectores forman una elipse con valores máximo y mínimo para direcciones perpendiculares entre sí.

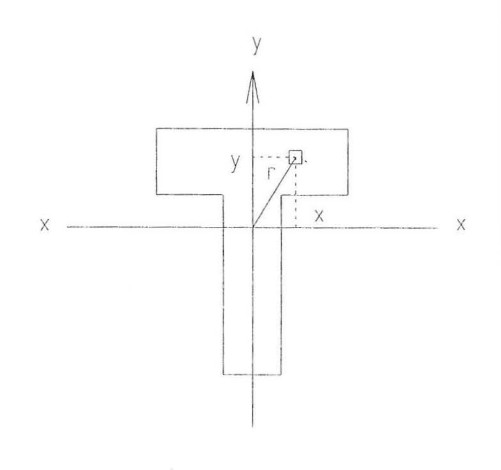
- Las inercias de una sección respecto a ejes que pasen por el centro de gravedad, forman una elipse con dos valores máximo y mínimo en direcciones perpendiculares entre sí.

- La suma de las inercias respecto a cualquier par de ejes perpendiculares entre sí es constante e igual a la inercia central I_0 respecto del centro de gravedad:

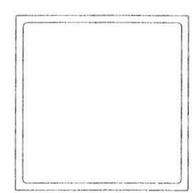
$$I_x + I_y = I_1 + I_2 \ldots = I_0$$

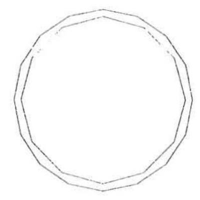
$$I_0 = \iint r^2 \cdot dx \cdot dy = \iint y^2 \cdot dx \cdot dy + \iint x^2 \cdot dx \cdot dy$$

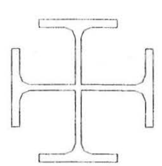
$$I_0 = I_x + I_y$$



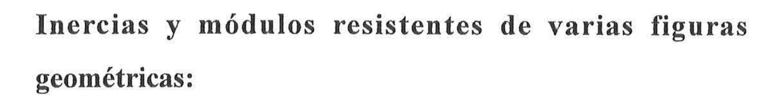
En secciones tales como





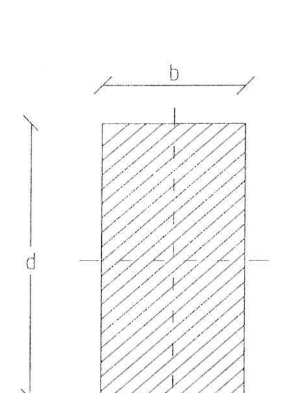


En las que $I_x = I_y$, resulta que $I_x = I_y = \dfrac{I_0}{2}$



Inercias y módulos resistentes de varias figuras geométricas:

Sección rectangular maciza:



$$A = b \cdot d$$

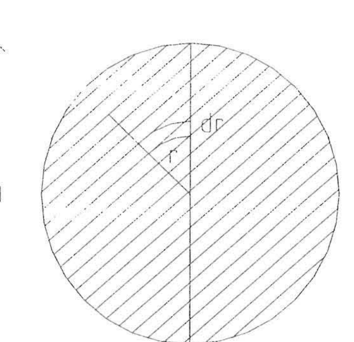
$$I_x = \int_{-d/2}^{d/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b}{3} \cdot \left[y^3\right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{b \cdot d^3}{12}$$

$$I_x = A \cdot \frac{d^2}{12}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \frac{d}{\sqrt{12}} = 0{,}29 \cdot d$$

$$W_x = \frac{I_x}{d/2} = \frac{b \cdot d^2}{6} = \frac{1}{6} \cdot A \cdot d$$

Sección circular maciza:



$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$I_0 = \int 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[r^4\right]_0^{d/2} = \pi \cdot \frac{d^4}{32}$$

$$I_x = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

$$I_x = A \cdot \frac{d^2}{16}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \frac{d}{\sqrt{16}} = 0{,}25 \cdot d$$

$$W_x = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{1}{8} A \cdot d$$

Sección circular hueca de pared delgada:

$$A = p \times d \times t$$

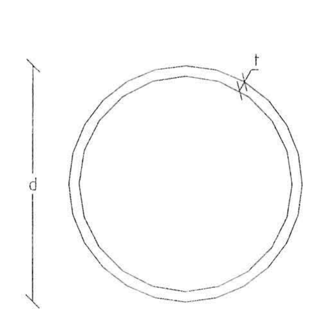
$$I_0 = \pi \cdot dt \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot t}{4}$$

$$I_x = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot t}{8}$$

$$I_x = A \cdot \frac{d^2}{8}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \frac{d}{\sqrt{8}} = 0{,}355 \cdot d$$

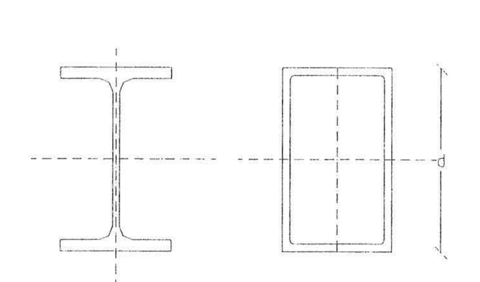
$$W_x = \frac{\frac{\pi \cdot d^3 \cdot t}{8}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot t}{4} = \frac{1}{4} A \cdot d$$



Perfiles laminados y secciones rectangulares huecas.

$$I_x = A \cdot \frac{d^2}{6} \quad W_x = \frac{1}{3} \cdot A \cdot d$$

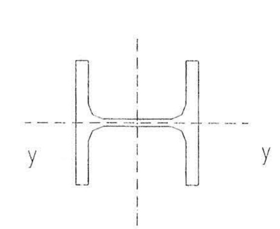
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \approx \frac{d}{\sqrt{6}} = 0{,}41 \cdot d$$



Perfiles laminados respecto al eje yy.

$$I_y \approx A \cdot \frac{d^2}{16} \quad W_x \approx \frac{1}{8} \cdot A \cdot d$$

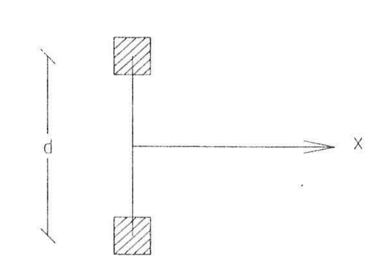
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \approx \frac{d}{\sqrt{16}} = 0{,}25 \cdot d$$



Sección inconexa.

$$I_x = A \cdot \frac{d^2}{4} \quad W_x = \frac{1}{2} \cdot A \cdot d$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \frac{d}{\sqrt{4}} = 0{,}5 \cdot d$$



INFLUENCIA DE LA FORMA DE LA SECCIÓN

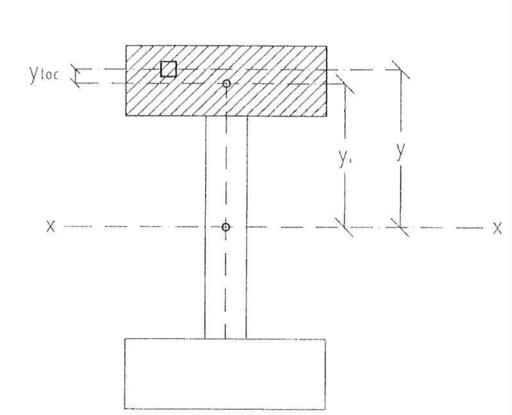
A igualdad de área el mayor módulo resistente corresponde a la sección inconexa: A · d/2 y el menor a la sección circular maciza: A · d/8.

A igualdad de canto, una sección circular maciza necesita cuatro veces el área de una inconexa para alcanzar la misma eficacia a flexión.

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{W_x \cdot d}{2 \cdot A} \qquad W_x = 2 \cdot A \cdot \frac{i_x^2}{d} = A \cdot d \cdot 2 \cdot \left(\frac{i_x}{d}\right)^2$$

i/d	W_x área A constante
0,5	1/2 A·d
0,41	1/3 A·d
0,355	1/4 A·d
0,29	1/6 A·d
0,25	1/8 A·d

SECCIONES COMPUESTAS. TEOREMA DE STEINER.



Para calcular la inercia de una sección que puede descomponerse en varias partes de geometría sencilla.

En cada uno de los trozos:

$y = y_i + y_{loc}$, siendo y_i la ordenada del c.d.g. e y_{loc} la ordenada respecto al centro de gravedad local

$y^2 = (y_i + y_{loc})^2 = y_i^2 + y_{loc}^2 + 2 \times y_i \times y_{loc}$

Para cada uno de los trozos:

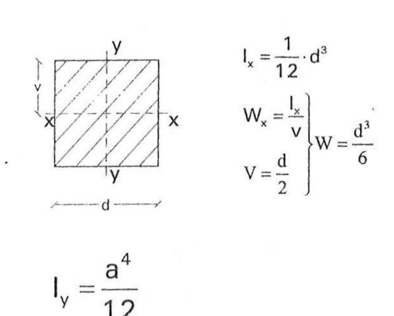
$$\iint y^2 \cdot dx \cdot dy = \underbrace{y_i^2}_{\substack{\text{ordenada} \\ \text{desde el c.d.g.}}} \cdot \underbrace{\iint dx \cdot dy}_{A_i} + \underbrace{\iint y_{loc}^2 \cdot dx \cdot dy}_{I_i} + \underbrace{\overbrace{2 \cdot y_i \cdot \iint y_{loc} \cdot dx \cdot dy}^{0}}_{\substack{\text{momento estático} \\ \text{del total del área sobre el c.d.g. local} \\ \text{-nulo por la propia definición de c.d.g.-}}}$$

Para el total:

$$I = \sum A_i \times y_i^2 + \sum I_i$$

La inercia de una sección compuesta es la suma de los productos de las áreas de cada parte por los cuadrados de las distancias respectivas entre los centros de gravedad locales y el centro de gravedad de la sección total, más la suma de las inercias de cada una de las partes de la sección respecto a su centro de gravedad.

LÍMITES DE VALIDEZ DEL MÉTODO ELÁSTICO



$I_y = \frac{a^4}{12}$

En el modelo elástico se considera agotada la capacidad resistente de una sección cuando $\sigma_{máx} = f$ lo que conduce a algunas paradojas:

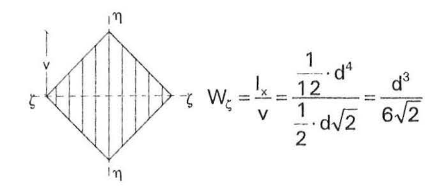
Suponiendo una viga de sección cuadrada con un

$$M_{máx} = M \quad \Rightarrow \quad \sigma_{máx} = \frac{M}{W_x} \leq f$$

Si se gira la viga 45° la inercia de la sección sigue siendo la misma —ya que la elipse de inercias de una sección cuadrada es una circunferencia— pero el módulo resistente disminuye al aumentar v.

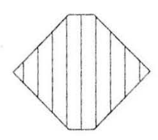
$$I_a = I_x \qquad W_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot W_x = 0{,}71 \cdot W_x$$

Si se gira la sección, la inercia seguirá siendo la misma, pero la distancia v de la fibra más alejada del c.d.g. ya no es de d/2 sino $d/\sqrt{2}$ con la consiguiente disminución de W_x y por tanto aumento de $\sigma_{máx}$.



Las tensiones máximas en la viga girada serán, por tanto, √2 veces mayores y teóricamente resistirá una carga √2 veces menor, lo que parece razonable.

Ya no lo es tanto el que si se cortan los picos, disminuye la inercia menos que v, con lo que aumenta el módulo resistente, de lo que resulta el contrasentido consecuencia del *modelo* de que pueden encontrarse ejemplos en que **quitando material se aumenta la resistencia teórica de una viga** —lo que desde luego no puede probarse experimentalmente; ya que sucede lo contrario lo que significa que **el modelo elástico tiene** limitaciones para predecir situaciones de rotura—.



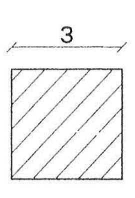
Si se eliminan "los picos" la inercia disminuye, pero más despacio que V por lo que aumenta el W_x de la sección girada con el canto completo.

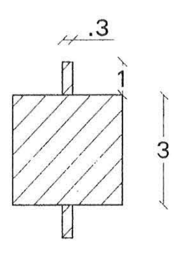
Se puede aún fabricar un ejemplo más claro de la inconsistencia del modelo para predecir la rotura:

Si a una sección se le añaden dos barras delgadas disminuye su módulo resistente, lo que no parece razonable —puede

corroborarse experimentalmente; aunque efectivamente los añadidos pueden y suelen romperse, ello no afecta a la resistencia de la viga original—.

La realidad es que por la forma de la gráfica de tensión-deformación, cuando se sobrepasa la deformación ε_e no se destruye el material, simplemente las tensiones de la zona deformada por encima de ε_e permanecen constantes. La cuestión merece un análisis más detallado que se desarrolla a continuación.





Si a una sección cuadrada le añadimos dos piezas como las de la figura, su W_x disminuye:

$$I_1 = \frac{1}{12} \cdot a \cdot b^3 = \frac{1}{12} \cdot a^4 = \frac{1}{12} \cdot 3^4 = 6{,}75$$

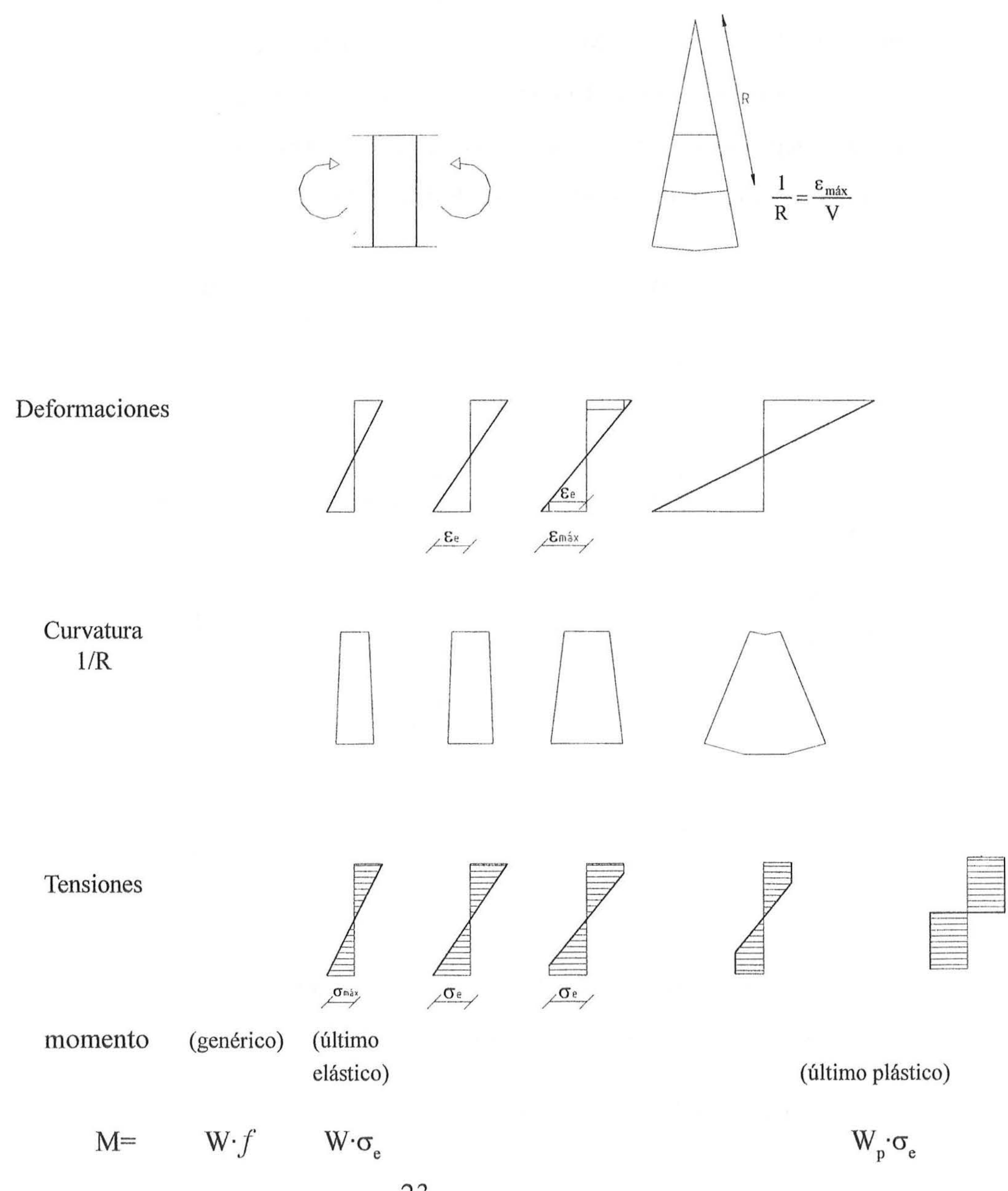
$$W_1 = \frac{I_1}{V} = \frac{6{,}75}{1{,}5} = 4{,}5$$

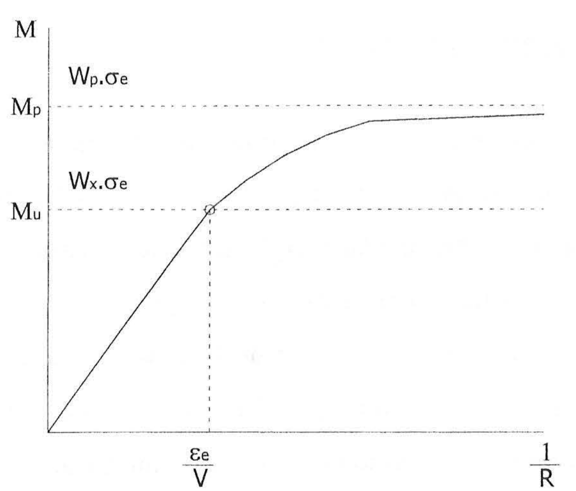
$$I_2 = 6{,}75 + 2 \cdot (I \cdot a + A \cdot a \cdot d^2) = 9{,}2$$

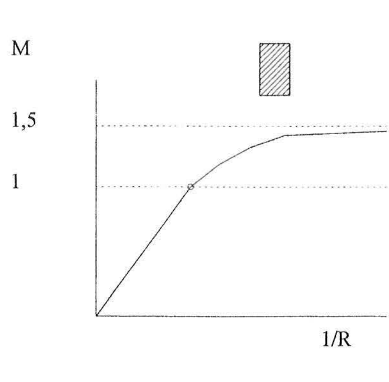
$$W_2 = \frac{9{,}2}{2{,}5} = 3{,}68 < 4{,}5$$

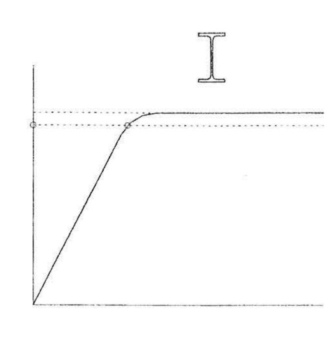
MODELO PLÁSTICO

Si se imagina un proceso progresivo de curvatura de una rebanada de material elastoplástico cuando las deformaciones sobrepasan el límite elástico ε_e las tensiones constantes e iguales a σ_e para toda la zona en que $\varepsilon > \varepsilon_e$, por lo que en lugar de producirse la rotura se pierde la proporcionalidad entre momento y curvatura pero sigue aumentando el momento resistido por la sección (a costa de acumular deformaciones permanentes).







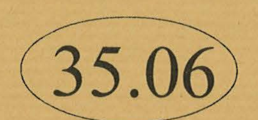


En el límite, la sección tendrá una curvatura infinita y resistirá un momento $M_p=W_p \cdot \sigma_e$ “M_p” es el momento plástico de la sección, su relación con el momento resistido en periodo elástico depende de la forma de la sección que determina la relación entre los módulos resistentes plástico y elásticos:

	W_x	W_p	W_p / W_x
	$\frac{1}{2} A \cdot d$	$\frac{1}{2} A \cdot d$	1
	$\frac{1}{3} A \cdot d$	$\frac{1,15}{3} A \cdot d$	1,15
	$\frac{1}{4} A \cdot d$	$\frac{1}{\pi} A \cdot d$	1,27
	$\frac{1}{6} A \cdot d$	$\frac{1}{4} A \cdot d$	1,5
	$\frac{1}{8} A \cdot d$	$\frac{2}{3\pi} A \cdot d$	1,7

el módulo resuistente plástico W_p se obtiene dividiendo la sección en 2 partes iguales y hallando la distancia entre los centros de gravedad Z_p, $W_p = \frac{A \cdot Z_p}{2}$

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

I.S.B.N. 84-9728-120-9



84-9728-120-9